

MÔ HÌNH HÓA HỆ TRUYỀN ĐỘNG BÁNH RĂNG MODELLING OF GEARING TRANSMISSION SYSTEMS

Lê Thị Thu Hà*, Dương Quỳnh Nga

Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp Thái Nguyên

TÓM TẮT

Bài toán nghiên cứu động lực học hệ truyền động bánh răng trong các máy tổ hợp là một bài toán phức tạp, nhưng không thể bỏ qua, vì nó sẽ quyết định chất lượng điều khiển hệ truyền động sau này. Để có được một chất lượng điều khiển cao, cần có một mô hình toán mô tả động học hệ truyền động bánh răng đủ chính xác. Mục đích của bài báo này là xây một mô hình toán đủ chính xác về cấu trúc cho hệ truyền động bánh răng cho bài toán điều khiển. Mô hình toán của bài báo sẽ chứa đựng trong nó đầy đủ các thành phần quyết định đặc tính động học của hệ, bao gồm tính đàn hồi của vật liệu, khe hở và ma sát. Kết quả mô phỏng đã khẳng định khả năng ứng dụng tốt của mô hình vào điều khiển chất lượng cao cho hệ truyền động qua bánh răng.

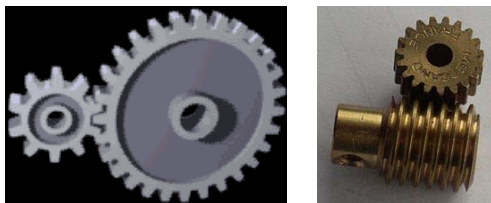
ABSTRACT

Research of dynamic gears transmission system in the compound machines is a complex problem. However, it cannot be ignored because it will determine the quality of further transmission control system. In order to achieve a high quality control, it is necessary to have an accurate mathematical model describing the dynamic gears transmission system. This paper aims to develop a mathematical model accurately in the angle of structure for the gear transmission system for the purpose of control task. Mathematical model in this paper will contain itself adequate factors which determines dynamic characteristic of system, including resilience of materials, aperture and friction. Simulation results confirmed the applicability of this model into high quality control for gears transmission system.

Key word: Gearing transmission systems, mathematical model, backlash, torsional moment.

1. Mở đầu

Trong các máy chuyên dụng, máy tổ hợp và các máy tự động điều khiển theo chương trình không thể không có sự tham gia của các hệ truyền động và hệ truyền động qua bánh răng là một trong số các hệ truyền động được sử dụng rộng rãi nhất. Hình H1 mô tả cấu trúc vật lý cơ bản của hệ truyền động qua bánh răng.



H1: Cấu trúc vật lý hệ truyền động qua bánh răng

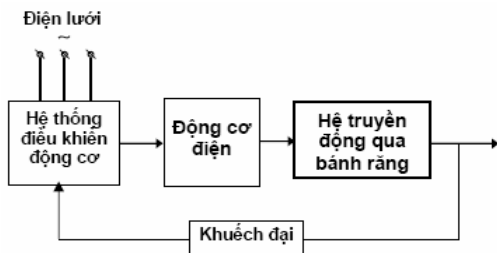
Chất lượng điều khiển hệ truyền động nói chung và hệ truyền động qua bánh răng nói riêng giữ một vai trò quyết định tới năng suất, chất lượng của sản phẩm, tuổi bền của máy và đảm

bảo môi trường làm việc cho người lao động. Vì vậy trong quá trình tính toán và thiết kế máy, người ta luôn phải tập trung nghiên cứu và áp dụng nhiều biện pháp kỹ thuật, để sao cho hệ truyền động nói riêng và các cơ cấu chấp hành nói chung làm việc được ổn định với dao động cho phép nằm trong giới hạn cho trước, tiếng ồn nhỏ, độ chính xác của biến đổi vận tốc, moment... cao [1].

Thêm nữa, đối với các máy tổ hợp sau một thời gian làm việc các yếu tố tác động nhiều không mong muốn vào hệ truyền động qua bánh răng như ma sát, khe hở giữa các bánh răng, độ không cứng vững của vật liệu, sự mài mòn của vật liệu theo thời gian..., đã dẫn tới sự mất ổn định động lực học trong hệ truyền động. Mất ổn định động lực học là trạng thái nguy hiểm nhất xảy ra khi tần số lực kích động có giá trị bằng hoặc xấp xỉ với tần số dao động riêng của hệ. Khi một quá trình gia công bị rơi vào trạng thái mất ổn định thì biên độ dao động của hệ rất lớn, làm cho hệ thống rung động mạnh, gây ồn và giảm độ chính xác cũng như chất lượng của sản phẩm.

Từ trước đến nay đã có nhiều công trình nghiên cứu về lý thuyết cũng như thực nghiệm nhằm giải thích nguyên nhân, bản chất của hiện tượng mất ổn định động lực học. Người ta đã đưa ra các giải pháp kỹ thuật chế tạo, bảo dưỡng cơ khí để tìm cách khống chế và loại trừ nó. Chẳng hạn như lắp thêm bánh đà, nâng cao độ chính xác khi chế tạo các chi tiết, điều chỉnh và lắp ráp theo các quy trình nghiêm ngặt, chấp hành các chế độ bảo quản bảo dưỡng và bôi trơn... [1],[4]. Mặc dù vậy các biện pháp này cũng chỉ giải quyết được một phần và có tính chất định kỳ. Trường hợp, do các yếu tố ngẫu nhiên xảy ra bất thường tác động thì các biện pháp cơ khí không thể khắc phục ngay được.

Do đó, để đáp ứng được yêu cầu đặt ra về ổn định động lực học cho hệ truyền động trong suốt thời gian làm việc, nâng cao tuổi thọ thiết bị thì bên cạnh các giải pháp cơ khí, người ta thường phải kết hợp sử dụng thêm các giải pháp điều khiển cho hệ truyền động [6] mà ở đây được hiểu là hệ thống điều khiển động cơ tạo moment dẫn động cho hệ truyền động như mô tả ở hình H2.



H2: Điều khiển hệ truyền động qua bánh răng

điều khiển hợp lý, thì để có chất lượng điều khiển càng cao, mô hình toán mô tả hệ thống càng phải chính xác [2]. Đây cũng là nhiệm vụ nghiên cứu của bài báo này.

Trong bài báo này, tác giả sẽ trình bày kết quả nghiên cứu về việc xây dựng mô hình toán mô tả hệ truyền động qua bánh răng. Mô hình toán này thu được hoàn toàn dựa trên phân tích lý thuyết về động lực học hệ bánh răng và các định luật cân bằng vật lý giữa các thành phần cơ trong nó. Nói cách khác ở đây chưa áp dụng thêm các phương pháp thực nghiệm để xác định những tham số hay các thành phần bất định của mô hình. Bởi vậy tính chính xác của mô hình đề xuất trong bài báo mới chỉ khẳng định được ở phần cấu trúc của mô hình.

Như vậy, tính chính xác của mô hình toán thu được cho hệ truyền động qua bánh răng ở đây mới chỉ được đảm bảo về mặt cấu trúc. Tuy nhiên mô hình toán này đã mô tả được chính xác

tối đa quan hệ qua lại giữa các thành phần bất định tác động ngẫu nhiên trong hệ, như dao động, ma sát, khe hở giữa các bánh răng, độ không cứng vững của vật liệu, sự mài mòn của vật liệu....

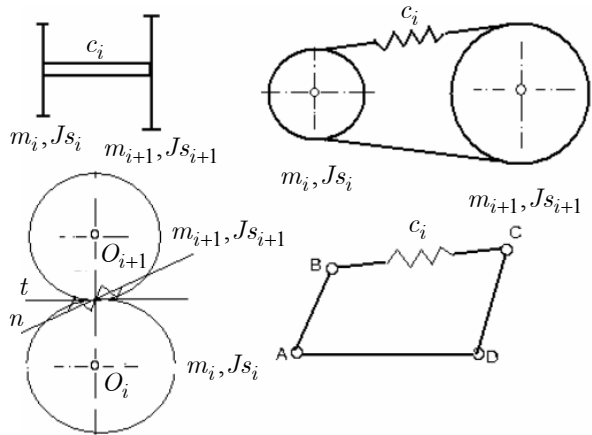
2. Phân tích động lực học hệ bánh răng

2.1. Động lực học có tính tới yếu tố đàn hồi

Ảnh hưởng các yếu tố đàn hồi trong hệ thống truyền động có liên quan mật thiết tới chuyển động của cơ cấu chấp hành [9]. Ví dụ như ảnh hưởng do biến dạng đàn hồi của các bộ truyền dây đai, các trục công tác đặc biệt trục chính của các máy công cụ, các cặp bánh răng bị biến dạng đàn hồi trong quá trình ăn khớp, các khâu thanh truyền trong các cơ cấu truyền động ví dụ như đối với cơ cấu bốn khâu bản lề

Để thấy rõ yếu tố đàn hồi có ảnh hưởng tới chuyển động của máy hãy xét các trường hợp hai bánh răng được gắn trên một trục, nếu xem chúng là một khâu rắn tuyệt đối thì rõ ràng vận tốc góc của bánh răng i sẽ có cùng giá trị và chiều quay với bánh răng $i+1$ ở hình minh họa

H3, nhưng khi trục của nó có độ cứng c_i thì trong quá trình chuyển động, vận tốc của chúng sẽ không bằng nhau. Điều đó cũng sẽ xảy ra tương tự đối với các trường hợp bộ truyền đai, bộ truyền bánh răng cũng như đối với cơ cấu 4 khâu bản lề.



H3: Biến dạng đàn hồi của các khâu trong máy

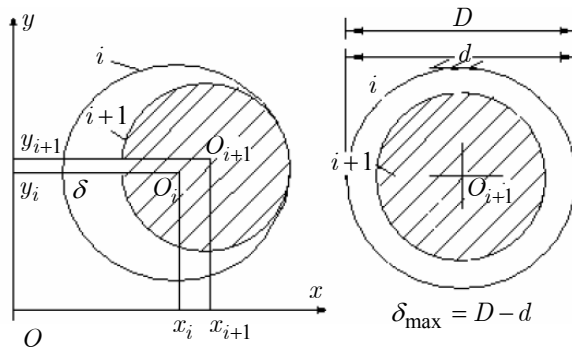
2.2. Động lực học kể tới các yếu tố khe hở (backlash)

Trong hệ thống truyền động cơ khí luôn tồn tại khe hở giữa các thành phần của khớp động ví dụ như: Khe hở trong các ổ đỡ, bộ truyền dây đai, bộ truyền xích truyền động vít- đai ốc, truyền động trục vít-bánh vít và khe hở của các cặp bánh răng ăn khớp. Các khe hở nói trên tồn tại là do có sai số trong quá trình chế tạo, lắp ráp

và mòn, ngoài ra các khe hở có thể được xuất hiện do trong quá trình làm việc các tiết máy bị biến dạng đàn hồi. Các khe hở trong máy có ảnh hưởng trực tiếp tới chuyển động của cơ cấu chấp hành, gây ồn và giảm nhanh tuổi bền của máy.

Mặt khác khi tồn tại các khe hở trong máy thì bài toán động lực học trở nên rất phức tạp, do khe hở mà số bậc tự do của hệ thống truyền động tăng lên và bài toán trở nên không xác định. Ví dụ:

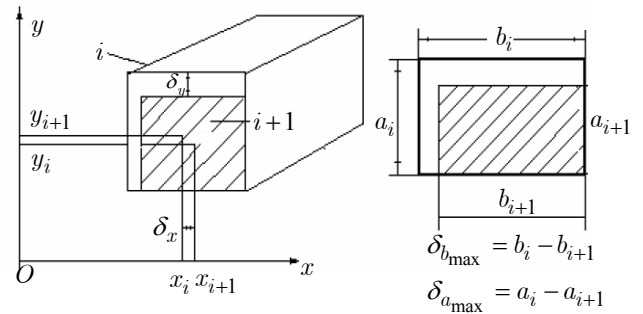
- Ảnh hưởng của khe hở trong các khớp quay. Hình H4 biểu diễn một khớp loại thấp, đó là khớp quay quay hình trụ, do có khe hở $\delta_{\max} = D - d$, nên để xác định được vị trí tọa độ trọng tâm của trục, khi đã biết tọa độ trọng tâm của ổ thì cần phải xác định được thêm hai thông số x và y . Như vậy trong hệ thống truyền động, khi mỗi khớp quay, hay còn gọi là khớp loại thấp p_5 , có xuất hiện khe hở thì nó sẽ làm tăng số bậc tự do của hệ thêm 2 [1],[2].



H4: Khe hở trong các khớp quay

- Ảnh hưởng của khe hở trong các khớp tịnh tiến. Đối với khớp tịnh tiến cũng là khớp loại thấp do thành phần khớp động là bề mặt, giả sử có hai khâu động i và $i+1$ được nối với nhau bằng một khớp động tịnh tiến trên hình H5. Do giả thiết có khe hở δ_y và δ_x vì thế vị trí tâm O của con trượt thuộc khâu $i+1$ chỉ được xác định khi biết được hai tọa độ $x+1$ và $y+1$. Điều đó chứng tỏ rằng khi một khớp tịnh tiến có khe hở cũng sẽ làm tăng bậc tự do của hệ thống truyền động lên 2.

Như vậy nếu có i khớp loại thấp, bao gồm khớp quay và khớp tịnh tiến hay còn gọi là khớp loại p_5 , có chứa khe hở thì số bậc tự do của hệ tăng lên $w_{p5} = 2i$.



H5: Khe hở trong các khớp tịnh tiến

- Ảnh hưởng của khe hở trong các khớp loại cao. Khớp động loại cao là những khớp động mà các thành phần của khớp khi tiếp xúc với nhau là đường hoặc điểm [1]. Ví dụ các khe hở trong các khớp loại cao được sử dụng trong máy thường xuất hiện ở chỗ tiếp xúc giữa con lăn với rãnh định hướng của nó trong cơ cấu cam, hay chỗ tiếp xúc giữa các đôi răng ăn khớp của các cặp bánh răng và khe hở trong bộ truyền bánh vít trục vít.

Các khe hở trong các cơ cấu nói trên thường xuất hiện do mòn bởi có hiện tượng trượt giữa hai thành phần khớp động [1], hoặc trong quá trình làm việc hoặc do sai số trong quá trình lắp ráp, chế tạo. Đặc biệt trong các hệ thống truyền động phần lớn sử dụng các cơ cấu bánh răng để biến đổi chuyển động hay truyền năng lượng, khe hở của các cặp bánh răng có thể xảy ra do sai số kích thước trong quá trình chế tạo và lắp ráp hoặc điều chỉnh không chính xác, hoặc sau một thời gian làm việc các biên dạng răng bị mòn do các thành phần ma sát trên các bề mặt tiếp xúc, các trường hợp nói trên đều dẫn tới việc tạo ra các khe hở cạnh răng, khe hở cạnh răng luôn luôn được đo trên đường pháp tuyến chung $n-n$ của các cặp biên dạng đôi tiếp. Do đó khe hở cạnh răng xảy ra trong trường hợp:

$$t_{Ni} \neq t_{N(i+1)} \quad (1)$$

Nếu gọi $|\delta|$ là khe hở cạnh răng ta có:

$$|\delta| = |t_{Ni} - t_{N(i+1)}| \quad (2)$$

Vì $|\delta|$ luôn có giá trị dương, nên có thể viết độ lớn của khe hở trong bộ truyền bánh răng dưới dạng:

$$\delta_{i(i+1)} = t_{Ni} - t_{N(i+1)} \quad (3)$$

Khi $t_{Ni} > t_{N(i+1)}$ và ngược lại:

$$\delta_{(i+1)i} = t_{N(i+1)} - t_{Ni} \quad (4)$$

Trong đó t_{Ni} và $t_{N(i+1)}$ là bước răng đo trên vòng tròn cơ sở của hai cặp biên dạng răng đối tiếp vì thế:

$$t_{Ni} = \frac{2\pi r_{0i}}{z_i}, \quad t_{N(i+1)} = \frac{2\pi r_{0(i+1)}}{z_{(i+1)}} \quad (5)$$

Nhưng do còn có:

$$r_{0i} = r_{Li} \cos \alpha_L, \quad r_{0(i+1)} = r_{L(i+1)} \cos \alpha_L \quad (6)$$

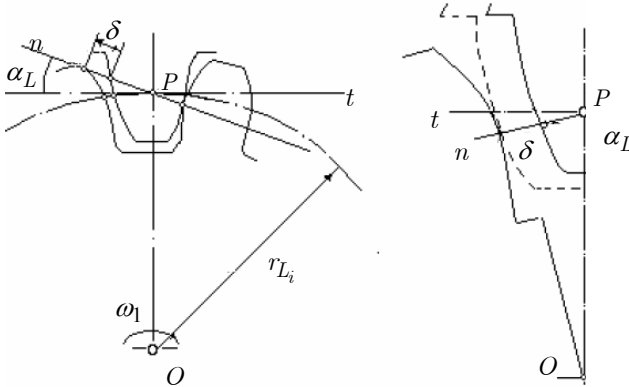
Nên:

$$t_{Ni} = \frac{2\pi r_{Li} \cos \alpha_L}{z_i}, \quad t_{N(i+1)} = \frac{2\pi r_{L(i+1)} \cos \alpha_L}{z_{(i+1)}} \quad (7)$$

Thay **Error! Reference source not found.** vào (3) và (4), ta có:

$$\delta_{i(i+1)} = t_{Li} - t_{L(i+1)}$$

Trong đó: t_{Li} , $t_{L(i+1)}$ là bước răng của hai bánh răng ăn khớp i và i+1 được đo trên vòng tròn lăn [1].



H6: Khe hở trong các khớp động loại cao

Do có tồn tại khe hở giữa hai trục bánh răng với các ổ bi đỡ trục nên trong quá trình chuyển động tọa độ tâm quay của các trục thay đổi, nên khe hở ăn khớp của cặp bánh răng cũng thay đổi theo thời gian t, khe hở đó có thể được xác định theo công thức được viết dưới dạng tổng quát:

$$\delta_i(t) = [(x_i - x_{i+1}) \sin \alpha_{Li} + (y_i - y_{i+1}) \cos \alpha_{Li}] + r_i \theta_i - r_{i+1} \theta_{i+1} \quad (8)$$

$$\delta_{(i+1)}(t) = [(x_{i+1} - x_{i+2}) \sin \alpha_{L(i+1)} + (y_{i+1} - y_{i+2}) \cos \alpha_{L(i+1)}] + r_{i+1} \theta_{i+1} - r_{i+2} \theta_{i+2} \quad (9)$$

Trong đó x_i và y_i là tọa độ tâm quay của các bánh răng thứ i, α_{Li} là góc ăn khớp, r_i là bán kính vòng tròn lăn, θ_i là góc quay của bánh răng thứ i.

- Ảnh hưởng khe hở tới số bậc tự do của hệ thống truyền động. Thông thường trong một hệ thống truyền động cơ khí người ta sử dụng các khớp loại thấp p_5 và khớp loại cao p_4 như đã nêu trên. Vậy giả sử trong hệ thống truyền động

phẳng nếu có i khớp p_5 và j khớp p_4 tồn tại khe hở, thì số bậc tự do của hệ sẽ tăng lên W_B bậc tự do. Nếu gọi W_0 là số bậc tự do của hệ khi không có khe hở, thì khi xuất hiện các khe hở thì bậc tự do của hệ sẽ tăng lên là:

$$W = W_0 + W_B \quad (6)$$

$$\text{Hay } W = W_0 + 2i + j \quad (7)$$

Trong đó i là khớp loại thấp có khe hở, j là số khớp loại cao có khe hở, W_0 là số bậc tự do ban đầu của hệ thống truyền động khi hệ thống không có khe hở và W là số bậc tự do của hệ thống truyền động.

Rõ ràng một hệ truyền động cơ khí khi tồn tại khe hở trong các khớp động thì số bậc tự do W của hệ sẽ tăng lên, do tồn tại khe hở mặc dù có thể rất bé nhưng sẽ làm cho hệ thống chuyển động không hoàn toàn xác định, dẫn tới chuyển động của cơ cấu chấp hành cũng không xác định, nó sẽ phát sinh các nhiễu động phi tuyến trong quá trình máy làm việc và tạo ra các xung va đập trong máy. Làm cho độ tin cậy của của cơ cấu chấp hành không cao.

Để hạn chế ảnh hưởng gây ra do các khe hở trong các khớp động người ta cũng đã tiến hành thực hiện các quy định nghiêm ngặt trong quá trình thiết kế chế tạo các tiết máy, cũng như lắp ráp vận hành sửa chữa và bảo trì bảo dưỡng máy, tuy nhiên để đảm bảo bảo hệ thống hoàn toàn không có khe hở là một điều khó tránh khỏi.

- Ảnh hưởng khe hở tới chuyển động của máy. Như phân tích trên cho thấy một hệ thống truyền động khi tồn tại các khe hở sẽ dẫn tới làm tăng số bậc tự do W của hệ thống, do đó hệ thống chuyển động không xác định, gây ra nhiễu động hỗn loạn khiến tính chất động lực học của cơ cấu hành thay đổi và không kiểm soát được.

Khi cơ cấu có khe hở trong các khớp thì sẽ xảy ra hiện tượng va đập trong các khớp khiến hệ thống làm việc rất ồn và giảm tuổi bền của hệ thống. Do đó việc nghiên cứu động lực học của hệ truyền động có kể đến yếu tố đàn hồi và khe hở có ý nghĩa thực tiễn rất quan trọng.

3. Mô hình hóa hệ bánh răng có yếu tố đàn hồi và khe hở

Trong khi nghiên cứu sự làm việc của các bộ truyền động cơ khí nói chung và bộ truyền bánh răng nói riêng thường người ta giả thiết các vật liệu làm ra nó cứng tuyệt đối, có nghĩa hoàn toàn không bị biến dạng dưới tác động của lực, nhưng trong thực tế dưới tác động của lực bao giờ cũng xảy ra biến dạng, tuy nhiên để làm việc được và không xảy ra hiện tượng phá hủy, người ta chỉ

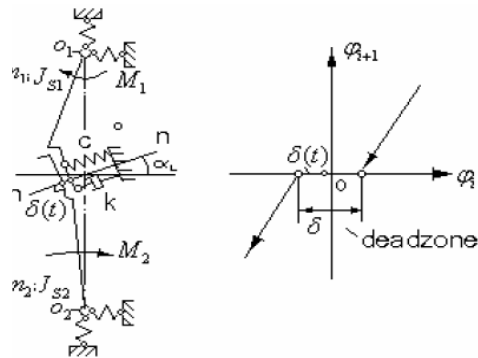
cho phép lực tác động nằm trong một giới hạn nhất định, để sao cho sau khi hết tác động của lực chi tiết trở về trạng thái ban đầu, hay nói một cách khác nghiên cứu chi tiết làm việc trong giới hạn đàn hồi.

Ngoài yếu tố kể trên khi xét tới khe hở của các ổ trục và khe hở giữa các cặp bánh răng ăn khớp δ thì bài toán trở nên phức tạp hơn rất nhiều. Dưới đây bài báo sẽ xây dựng mô hình tính toán động lực học đối với một cặp bánh răng và để từ đó xây dựng mô hình tính toán động lực học cho cả hệ bánh răng có tính đến yếu tố đàn hồi, khe hở và độ cứng của răng, từ đó để tiến hành nghiên cứu chất lượng của bộ truyền khi kể đến ảnh hưởng của các của yếu tố nói trên. Tuy nhiên, trong một số trường hợp ứng dụng người ta có thể bỏ qua các yếu tố như độ cứng của bánh răng hay giảm chấn, ma sát..., tùy theo mức độ chính xác yêu cầu.

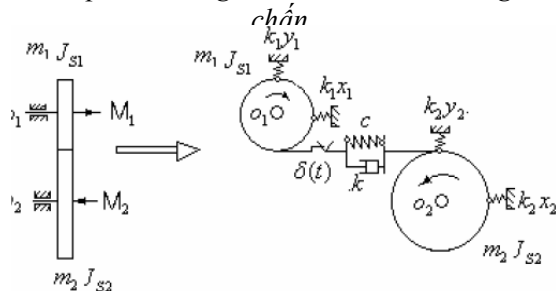
Trong quá trình làm việc, ở hệ truyền động bánh răng gồm hai bánh răng 1 và 2 có tính đến khe hở và biến dạng đàn hồi của răng thường xảy ra hai trạng thái, đó là:

Hai bánh răng chưa ăn khớp với nhau do có khe hở cạnh răng δ , khi đó ta có thể xem hai bánh răng đó chuyển động độc lập với nhau.

Hai bánh răng khi tiếp xúc với nhau do tính chất đàn hồi của vật liệu, răng bị biến dạng, nên xuất hiện thành phần lực gây ra biến dạng đàn hồi tỷ lệ với độ cứng c và lực giảm chấn tỷ lệ với hệ số giảm chấn k .



H7: Cặp bánh răng có khe hở, đàn hồi và giảm



H8: Mô hình động lực học hệ cặp bánh răng có khe hở, đàn hồi và giảm chấn

Trên hình H7 cho thấy khi kể đến khe hở của hai ổ trục O_1O_2 và khe hở giữa các kẽ răng $\delta = \delta(t)$ theo công thức (6), thì quá trình ăn khớp của hai bánh răng trở nên rất phức tạp và có thể chia làm hai giai đoạn trong một chu kỳ ăn khớp đó là giai đoạn chạy không trong vùng chết (deadzone) - va chạm - ăn khớp.

Hình H8 là sơ đồ mô phỏng động lực học của một cặp bánh răng nói trên có kể tới khe hở của các ổ trục và bánh răng cũng như biến dạng đàn hồi của răng trong quá trình ăn khớp.

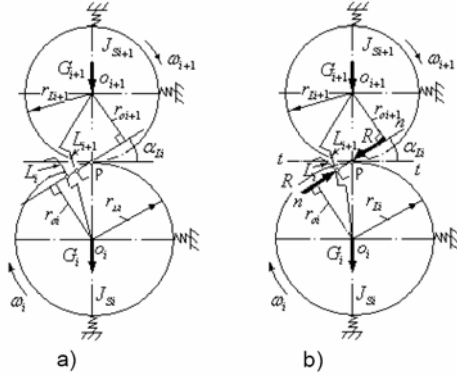
Để thiết lập phương trình động lực học tổng quát cho một hệ truyền động nói chung và hệ truyền động cơ khí gồm các bánh răng nói riêng trong các thiết bị, máy công tác trước hết ta phải quan tâm tới các thông số động học và động lực học của hệ thống cơ khí đó. Ngoài các thông số hình học của bộ truyền bánh [1] răng dưới đây chỉ quan tâm tới độ hở của các trục Δ_i và khe của các cặp bánh răng δ_i . Như vậy rõ ràng phương trình động lực học của bộ truyền bánh răng có thể được viết dưới dạng tổng quát:

$$\omega_n(z) = \omega_n(\omega_1, r_i, m, m_i, J_{Si}, \varphi_i, \omega_i, \alpha_{Li}, c_i, k_i, y_i, x_i, \delta_i, \Delta_i) \quad (12)$$

với ký hiệu vector:

$$z = (\omega_1, r_i, m, m_i, J_{Si}, \varphi_i, \omega_i, \alpha_{Li}, c_i, k_i, y_i, x_i, \delta_i, \Delta_i)^T$$

và ω_n là vận tốc thực của khâu chấp hành n , ω_1 là tốc độ góc của khâu dẫn, r_i là bán kính vòng tròn chia của các bánh răng, m là modun của các bánh răng, m_i là khối lượng của các bánh răng, J_{Si} là momen quán tính khối lượng của các bánh răng đối với các trục đi qua trọng tâm S_i , φ_i là vị trí của các bánh răng, ω_i là vận tốc góc của các bánh răng, α_{Li} là góc ăn khớp của cặp bánh răng thứ i , δ_i là khe hở cạnh răng giữa hai cặp biên dạng răng đối tiếp, Δ_i là khe hở giữa các trục và ổ trục thứ i và x_i, y_i là tọa độ trọng tâm của trục quay i . Rõ ràng để thiết lập được phương trình động lực học tổng quát của một hệ thống truyền động cơ khí khi kể đến các yếu tố, khe hở, đàn hồi thì trở nên phức tạp, tuy nhiên đó là một bài toán thực tế rất quan trọng, tùy thuộc vào mức độ chính xác các yêu cầu mà người ta có thể tìm các giải thuật khác nhau để ổn định thông số động lực học của khâu chấp hành ω_1 .



H9: Trạng thái làm việc của hệ cặp bánh răng có khe hở khi chưa ăn khớp a) và khi hai bánh răng đã ăn khớp b)

Tiếp theo, để thiết lập phương trình động lực học của bộ truyền bánh răng khi tính đến khe hở cạnh răng δ theo phương pháp tuyến $n-n$, ta hãy xét từng trường hợp cụ thể dưới đây.

a. Khi bánh răng chưa tiếp xúc

Khi hai bánh răng chưa tiếp xúc với nhau do có khe hở δ có thể xem hai bánh răng tách rời nhau xem trên hình H9a), ta có phương trình chuyển động của các bánh răng độc lập với nhau:

$$\left. \begin{aligned} J_{S_i} \ddot{\varphi}_i &= M_i - M_{ms} \\ m_i \ddot{x}_i &= G_i [\cos \gamma (\sin \gamma - f \cos \gamma)] \\ m_i \ddot{y}_i &= G_i [\sin \gamma (1 - f \cos \gamma)] \end{aligned} \right\}$$

Và

$$\left. \begin{aligned} J_{S_{i+1}} \ddot{\varphi}_{i+1} &= M_{i+1} + M_{ms} \\ m_{i+1} \ddot{x}_{i+1} &= G_{i+1} [\cos \gamma (\sin \gamma - f \cos \gamma)] \\ m_{i+1} \ddot{y}_{i+1} &= G_{i+1} [\sin \gamma (f - \cos \gamma)] \end{aligned} \right\}$$

Trong đó: J_{S_i} là moment quán tính khối lượng đối với trục đi qua trọng tâm bánh răng i , $G_i = m_i g$ là trọng lượng của bánh răng i , f là hệ số ma sát trượt khô trong ổ đỡ trục, γ là góc ma sát, ρ là bán kính vòng tròn ma sát, $G_i \rho = M_{ms}$ là moment ma sát, M_i là moment tác động trên các bánh răng, thành phần moment ma sát có thể phụ thuộc vào vị trí hoặc vận tốc góc của trục tùy theo chế độ bôi trơn cho ổ trục.

Quá trình trên biểu diễn khi hai bánh răng không tiếp xúc với nhau do có khe hở cạnh răng, nó chỉ xảy ra trong một khoảng thời gian ngắn, được xác định theo công thức sau:

$$\delta t = \frac{\delta}{\omega_i r_{oi}} \quad (10)$$

trong đó δ là khe hở cạnh răng, ω_i là vận tốc góc của bánh răng I , r_{oi} là bán kính vòng tròn cơ sở.

Trường hợp khe hở của các ổ đỡ trục có rất bé, dao động của trục có thể xem không đáng kể, có thể bỏ qua, khi hai bánh răng chưa tiếp xúc với nhau, hay nói một cách khác hai bánh răng chuyển động độc lập với nhau, ta có:

$$\left. \begin{aligned} J_{S_i} \ddot{\varphi}_i &= M_i - M_{ms} \\ J_{S_{i+1}} \ddot{\varphi}_{i+1} &= M_{i+1} + M_{ms} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Với giả thiết moment ma sát trong các ổ đỡ trục có cùng giá trị.

b. Quá trình biến dạng

Sau khi bánh răng chủ động vượt qua vùng chết δ (deadzone), ngay lập tức giữa hai bánh răng xảy ra hiện tượng va chạm. Thời gian xảy ra va chạm τ rất bé với giả thiết va chạm ở đây là va chạm đàn hồi và vì thế độ dịch chuyển của các bánh răng trong thời khắc xảy ra va chạm là không đáng kể. Khi đó hai biên dạng răng L_i và L_{i+1} chịu tác động một lực va chạm $\bar{N} + \bar{F}$, trong đó thành phần lực va chạm \bar{N} lớn hơn nhiều so với thành phần lực tác dụng \bar{F} .

Để tính vận tốc của hai bánh răng khi va chạm ta áp dụng định lý biến thiên moment động lượng. Nếu ta gọi L_i và L_{i+1} là moment động lượng của các bánh răng i và $i+1$ trước khi xảy ra va chạm, ta có:

$$L_T = J_{S_i} \dot{\varphi}_i + J_{S_{i+1}} \dot{\varphi}_{i+1} \quad (12)$$

(8) sau va chạm:

$$L_S = (J_{S_i} + J_{S_{i+1}}) \dot{\varphi}_S \quad (13)$$

Từ đó ta rút ra được vận tốc của hệ bánh răng sau khi va chạm là:

$$\dot{\varphi}_S = \frac{J_{S_i} \dot{\varphi}_i + J_{S_{i+1}} \dot{\varphi}_{i+1}}{J_{S_i} + J_{S_{i+1}}} \quad (14)$$

Quá trình xảy ra va đập trong phạm vi thời gian vô cùng bé và sau đó quá trình ăn khớp giữa hai bánh răng lại tiếp tục.

c. Khi hai bánh răng tiếp xúc

Khi hai bánh răng tiếp xúc với nhau sau va đập (xem trên hình H9b), sẽ xuất hiện các thành phần lực đàn hồi và giảm chấn. Lúc này ta có các phương trình sau:

$$\left. \begin{aligned} J_{S_i} \ddot{\varphi}_i &= M_i - M_{ms} - r_{oi} (F_i + D_i) \\ J_{S_{i+1}} \ddot{\varphi}_{i+1} &= (M_{i+1} + M_{ms}) - r_{oi+1} (F_{i+1} + D_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

trong đó:

$$F = c \Delta^n$$

với c là độ cứng đàn hồi của cặp bánh răng tiếp xúc, Δ là biến dạng đàn hồi của răng, n là hệ số phụ thuộc vào số điểm tiếp xúc trong đoạn ăn khớp thực của cặp bánh răng. Thực nghiệm cho thấy $1 < n < 1,5$.

Biến dạng đàn hồi của răng phụ thuộc và vị trí của cơ cấu của răng. Vậy có $F_i = c_i \varphi_i$, còn $D_i = k_i \dot{\varphi}_i$ là thành phần lực giảm chấn tỷ lệ với vận tốc góc của trục quay, k_i là hệ số giảm chấn.

Thay vào phương trình trên các ký hiệu $M_i - M_{ms} = M_i^*$ và $r_{0i} c_i = C_i$ ta có:

$$\left. \begin{aligned} J_{S_i} \ddot{\varphi}_i + K_i \dot{\varphi}_i + C_i \varphi_i &= M_i^* \\ J_{S_{i+1}} \ddot{\varphi}_{i+1} + K_{i+1} \dot{\varphi}_{i+1} + C_{i+1} \varphi_{i+1} &= M_{i+1}^* \end{aligned} \right\}$$

Khi hai bánh răng đã ăn khớp với nhau thì độ cứng thay thế và hệ số giảm chấn của nó được tính theo công thức: $C = c_i + c_{i+1}$ và hệ số giảm

chấn $K = \frac{k_i k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}}$. Vì vậy hệ phương trình

chuyển động của một cặp bánh răng ăn khớp trên có thể được viết dưới dạng tổng quát:

$$J \ddot{\varphi}(t) + K \dot{\varphi}(t) + C \varphi(t) = M(t)$$

Trong đó:

$$J \ddot{\varphi}(t) = \begin{vmatrix} J_{S_i} & 0 \\ 0 & J_{S_{i+1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\varphi}_i \\ \ddot{\varphi}_{i+1} \end{vmatrix}, \quad K \dot{\varphi}(t) = k \begin{vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_i \\ \dot{\varphi}_{i+1} \end{vmatrix}$$

$$C \varphi(t) = c \begin{vmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \end{vmatrix}, \quad c = c_i + c_{i+1}, \quad k = \frac{k_i k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}}$$

và C, K được là hệ số độ cứng và độ giảm chấn thay thế.

Thông thường trong bộ truyền bánh răng hệ số giảm chấn k rất bé có thể bỏ qua. Khi đó phương trình có dạng:

$$J \ddot{\varphi}(t) + C \varphi(t) = M(t)$$

Phương trình (17) là một phương trình vi phân cấp II có vế phải, vì vậy phương trình có nghiệm dạng tổng quát:

$$\varphi_{i+1}(t) = \varphi_{i+1}^* + \varphi_{i+1}^{**}$$

trong đó φ_{i+1}^* là nghiệm của phương trình vi phân không có vế phải hay còn gọi là nghiệm riêng của phương trình vi phân có dạng:

$$\varphi_{i+1}^* = A e^{\alpha t}$$

Còn φ_{i+1}^{**} là nghiệm của phương trình vi phân có vế phải, nghiệm này phụ thuộc hàm $M(t)$ và các hệ số giảm chấn K và độ cứng của răng các bánh răng C chứa trong phương trình (17).

Nhưng dạng của nghiệm φ_{i+1}^{**} có thể tìm được dưới dạng: $\varphi_{i+1}^{**} = B \cos(\alpha t + \beta)$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (17) khi bỏ qua hệ số giảm chấn k sẽ là:

$$\varphi_{i+1}(t) = A e^{\alpha t} + B \cos(\alpha t + \beta)$$

4. Mô phỏng và kiểm chứng

Như vậy, ba trạng thái làm việc khác nhau của hệ truyền động bánh răng, bao gồm các trạng thái khi các bánh răng chưa tiếp xúc nhau (chạy trong đoạn khe hở), khi bánh răng va chạm (quá trình biến dạng) và khi bánh răng tiếp xúc sau va chạm, sẽ được mô tả bởi ba phương trình khác nhau, lần lượt là (11), (14) và (15). Nói cách khác, mô hình toán của hệ bánh răng là mô hình đa cấu trúc, hay người ta còn gọi là hệ có cấu trúc biến đổi.

Để thực hiện mô phỏng, ta sẽ đơn giản hóa mô hình bằng cách sử dụng giả thiết là quá trình xảy ra va đập trong phạm vi thời gian vô cùng bé [3]. Khi đó, bằng việc bỏ qua quá trình xung đập va chạm, mô hình hệ bánh răng chỉ còn lại hai phương trình (11) khi ở vùng deadzone và (15) sau khi va chạm. Ghép chung hai mô hình toán này lại với nhau nhờ tham số biến thiên:

$$d(t) = \begin{cases} = 0 & \text{trong deadzone} \\ = 1 & \text{ngoài deadzone} \end{cases} \quad (18)$$

Ta sẽ có mô hình chung của hệ bánh răng là:

$$\left. \begin{aligned} J_{S_i} \ddot{\varphi}_i &= M_i - M_{ms} - d(t) r_{0i} (F_i + D_i) \\ J_{S_{i+1}} \ddot{\varphi}_{i+1} &= (M_{i+1} + M_{ms}) - d(t) r_{0i+1} (F_{i+1} + D_{i+1}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Mô hình toán chung (19) này là một mô hình bất định, vì trong nó có chứa các tham số chưa xác định được như moment ma sát M_{ms} và hàm bất định $d(t)$. Hiện nay để xác định thành phần bất định M_{ms} , người ta chủ yếu áp dụng các phương pháp thực nghiệm [8]. Thành phần hàm bất định $d(t)$ còn lại sẽ được khử nhờ các phương pháp điều khiển thích hợp, chẳng hạn như phương pháp điều khiển thích nghi giả định rõ giới thiệu trong [4] và [7].

Hình H10 là sơ đồ mô phỏng hệ cặp bánh răng mô tả bởi (19) cho trường hợp $i = 2$. Đại lượng M_1 là moment đầu vào, được cung cấp từ động cơ dẫn động và M_2 là moment đầu ra của hệ. Các thành phần bất định M_{ms} và $d(t)$ của mô hình được biểu diễn bởi nhiễu tác động vào hệ.

Thành phần $(F_i + D_i)$ là lực biến dạng đàn hồi và lực giảm chấn giữa các bánh răng i và $i+1$ được xác định theo công thức:

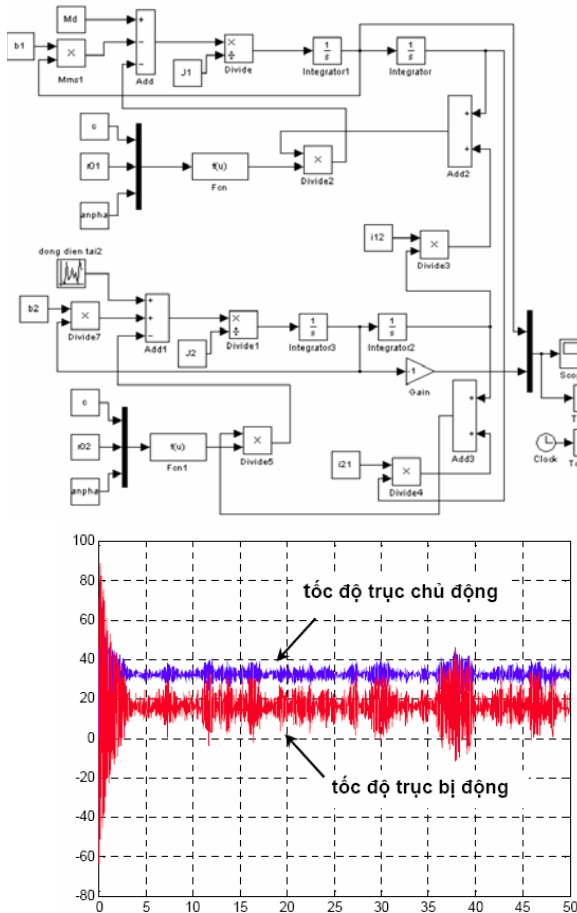
$$(F_i + D_i) = c_i r_{0i} \cos^2 \alpha_L (\varphi_i + i_{i,i+1} \varphi_{i+1})$$

Trong đó ở bánh răng cuối cùng, mà trong mô phỏng dưới đây với $i=2$ là bánh răng thứ hai, có $\varphi_{i+1} = \varphi_3 = \varphi_2$. Những tham số còn lại trong hệ được giả định là:

$$J_{S1} = 0,01 \text{ kgm}^2, J_{S2} = 0,02 \text{ kgm}^2,$$

$$r_{01} = 50 \text{ mm}, r_{02} = 100 \text{ mm},$$

$$\alpha_L = 30^0, c_1 = c_2 = 10 \text{ N}, i_{12} = 2$$



Hình H11 là kết quả mô phỏng khi đầu vào M_1 là hằng số. Kết quả mô phỏng này, về mặt định tính, đã cho thấy mô hình (19) mô tả sát thực với trạng thái làm việc thực tế của hệ truyền động qua một cặp bánh răng.

5. Kết luận

Bài báo đã xây dựng được mô hình toán (11), (14) và (15) cho hệ truyền động bánh răng ở ba trạng thái làm việc khác nhau gồm trạng thái khi bánh răng chưa ăn khớp, trạng thái va đập khi vừa ăn khớp và trạng thái ăn khớp sau va đập đàn hồi. Cả ba mô hình trên có thể được ghép chung lại thành một mô hình bất định hàm thống nhất là mô hình (19). Mô hình toán này,

bên cạnh thành phần bất định hàm $d(t)$ còn chứa bên trong nó các tham số hằng bất định khác bao gồm độ cứng vững của vật liệu, khe hở, độ biến dạng và hệ số ma sát.

Để xây dựng tiếp được mô hình toán chính xác hơn, không chứa tham số bất định, ta phải tiến hành thực nghiệm nhằm xác định cụ thể các hằng số bất định trên. Và cũng đã có nhiều phương pháp thực nghiệm được giới thiệu phục vụ nhận dạng được độ cứng vững của vật liệu, khe hở, độ biến dạng, hệ số ma sát này. Tuy nhiên, điều này là thực sự không cần thiết, vì ta có thể sử dụng các phương pháp điều khiển hiện đại để khắc phục tính bất định tham số đó của mô hình.

Mô hình hệ truyền động bánh răng (19) của bài báo, tuy rằng còn chứa nhiều tham số hằng bất định gồm độ cứng vững của vật liệu, khe hở, độ biến dạng, ma sát, song lại có cấu trúc mô tả được chính xác các quan hệ động lực học của chúng trong hệ truyền động bánh răng. Do đó nếu được áp dụng thêm phương pháp điều khiển thích hợp, chẳng hạn như phương pháp điều khiển thích nghi bền vững giới thiệu ở tài liệu [4], ta vẫn có thể điều khiển được hệ truyền động với một chất lượng điều khiển cao mà không cần phải nhận dạng hay thực nghiệm xác định xấp xỉ các tham số bất định đó. Nói cách khác, mô hình của bài báo là đủ chính xác để thiết kế được bộ điều khiển chất lượng cao cho hệ truyền động qua bánh răng.

Tài liệu tham khảo

- [1] Đinh Gia Tường; Phan Văn Đồng và Tạ Khánh Lâm (2007): *Nguyên lý máy*. NXB Giáo dục (xuất bản lần thứ 4).
- [2] David Morin (2008): *Introduction to classical mechanics. With problems and solutions*. Cambridge University Press.
- [3] Deur,J. and Peric,N. (1999): *Analysis of Speed Control for Electrical Drivers with Elastic Transmission*. IEEE International Symposium on Industrial Electronics. Bled, Slovenia, pp. 624-630.
- [4] Lê thị Thu Hà (2013): *Một số giải pháp nâng cao chất lượng hệ truyền động có khe hở trên cơ sở điều khiển thích nghi, bền vững*. Luận án tiến sỹ kỹ thuật. ĐHKTCN Thái Nguyên.
- [5] Lê Thị Thu Hà (2009): *Nghiên cứu, nâng cao chất lượng hệ truyền động có khe hở*. Đề tài cấp Bộ năm 2009, mã số BN2009-TN02-09.
- [6] Lại Khắc Lãi và Lê Thị Thu Hà (2010): *Một phương pháp nâng cao chất lượng hệ truyền động qua bánh răng*. Tuyển tập hội nghị toàn quốc lần thứ 5 về cơ điện tử, trang 134-137.
- [7] Lê Thị Thu Hà và Nguyễn Doãn Phước (2012): *Điều khiển bám thích nghi hệ phi tuyến bất định có để ý tới tạp nhiễu và ứng dụng vào điều khiển hệ truyền động qua bánh răng*. Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 9.
- [8] Manish Vaishya and Rajendra Singh (2003): *Strategies for modelling friction in gear dynamics*. Journal of mechanical design, vol.125, pp.383-393
- [9] Walha, L.; Fakhfakh, T. and Haddar, M. (2009): *Nonlinear dynamic of two stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash*. Mechanism and Machine 44, pp.1058-1069, 2009.