

Thuật toán giảm bậc bảo toàn điểm cực dựa theo phân tích Schur

Model reduction in Schur basis with pole retention

Ths Vũ Ngọc Kiên

Trường Đại học Kỹ thuật Công nghiệp - Đại học Thái Nguyên

e-Mail: atv324@gmail.com

Tóm tắt: Giảm bậc mô hình là một hướng nghiên cứu đang được nhiều nhà khoa học quan tâm trong những năm gần đây. Đã có rất nhiều thuật toán giảm bậc được giới thiệu với nhiều hướng tiếp cận khác nhau trong đó bảo lưu các điểm cực quan trọng của hệ gốc trong hệ giảm bậc là một hướng tiếp cận đúng đắn và có nhiều ưu điểm.

Bài báo giới thiệu một thuật toán giảm bậc mô hình mới, thuật toán giảm bậc dựa theo phân tích Schur, dựa trên ý tưởng bảo lưu các điểm cực quan trọng của hệ gốc trong quá trình giảm bậc. Thuật toán mới chuyển đổi ma trận A của hệ gốc bậc cao về dạng ma trận tam giác trên trong đó các điểm cực được sắp xếp theo tính chất quan trọng giảm dần trên đường chéo chính của ma trận tam giác trên. Các ví dụ minh họa thể hiện tính đúng đắn của thuật toán giảm bậc.

Từ khóa: Giảm bậc mô hình, thuật toán Schur, điểm cực quan trọng

Abstract: Model order reduction is a research direction which is more interested scientists in recent years. There have been many order reduction algorithm introduced to many different approaches in which retaining the important poles of the original system in the reduced root system is the right approach and has many advantages.

This paper presents a new model order reduction algorithm, the order reduction algorithm based on Schur analysis, based on the idea of keeping the important poles of the original system in the order reduction process. This algorithm transforms matrix A of the higher-order original system to upper - triangle matrix on which the poles are arranged in descending important properties on the main diagonal of the upper - triangle matrix. The illustration shows the correctness of the model order algorithm.

Key word: Model order reduction, Schur analysis, important poles

I. Đặt vấn đề

Thuật toán giảm bậc mô hình dựa theo phân tích Schur được phát triển bởi nhóm nghiên cứu dựa trên cơ sở kỹ thuật cắt ngắn và phân tích Schur.

Kỹ thuật cắt ngắn là một phương pháp giảm bậc đơn giản. Trong đó ý tưởng chính của nó có thể phân chia làm 2 bước: bước 1 chuyển đổi hệ thống gốc bậc cao về hệ thống tương đương bằng một chuyển đổi không suy biến trong không gian trạng thái, bước 2 xoá một số hàng và một số cột của hệ thống tương đương để tạo ra hệ thống giảm bậc. Hai thuật toán tiêu biểu nhất cho kỹ thuật cắt ngắn là cắt ngắn cân bằng [1] và cắt ngắn mô hình nhiễu loạn [2]. Tuy nhiên, mỗi thuật toán lại có những ưu nhược điểm khác nhau. Thuật toán cắt ngắn mô hình có ưu điểm là tính toán dễ dàng, hệ giảm bậc bảo toàn được một số trạng thái của hệ gốc nên hệ giảm bậc là bền vững và lưu giữ được một số đặc tính vật lý của hệ gốc. Tuy nhiên thuật toán cắt ngắn cân bằng lại không

sắp xếp được các điểm cực theo tính chất quan trọng giảm dần trên đường chéo chính của ma trận A trước khi giảm bậc. Do vậy nó không có khả năng bảo toàn các điểm cực quan trọng của hệ gốc trong hệ giảm bậc. Thuật toán cắt ngắn mô hình nhiễu loạn thực hiện bảo lưu các giá trị Hankel suy biến lớn của hệ gốc trong hệ giảm bậc do đó nó bảo lưu được tính bền vững và mô hình cực tiểu của hệ gốc trong hệ giảm bậc. Tuy nhiên thuật toán cắt ngắn mô hình nhiễu loạn có nhược điểm là tính toán phức tạp và cũng không có khả năng bảo lưu các điểm cực quan trọng của hệ gốc trong hệ giảm bậc. Mà các điểm cực quan trọng là bất biến trong hệ thống thực nên nó cần được bảo toàn trong quá trình giảm bậc.

Từ những phân tích trên tác giả Minh H.B cùng nhóm nghiên cứu [3] đã đưa ra ý tưởng kết hợp hai thuật toán trên để tạo ra thuật toán mới trên có sở giữ lại những đặc tính tốt của hai thuật toán và loại bỏ những đặc tính không tốt. Ý tưởng chính của thuật

toán là chuyển đổi ma trận A của hệ thống trong (1) về dạng ma trận tam giác trên dựa theo phân tích Schur, trên cơ sở các giá trị điểm cực được sắp xếp theo tính chất quan trọng giảm dần trên đường chéo chính của ma trận tam giác trên A. Sau đó thực hiện bước 2 của kỹ thuật cắt ngắn, như thế các điểm cực quan trọng được bảo toàn trong hệ thống giảm bậc.

II. Thuật toán giảm bậc mô hình mới

2.1 Bài toán giảm bậc mô hình

Cho một hệ tuyến tính, liên tục, tham số bất biến theo thời gian, có nhiều đầu vào, nhiều đầu ra, mô tả trong không gian trạng thái bởi hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

trong đó, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$.

Mục tiêu của bài toán giảm bậc đối với mô hình mô tả bởi hệ phương trình đã cho trong (1) là tìm mô hình mô tả bởi hệ các phương trình:

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u \\ y_r &= C_r x_r \end{aligned} \quad (2)$$

trong đó, $x_r \in \mathbb{R}^r$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y_r \in \mathbb{R}^q$, $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $C_r \in \mathbb{R}^{q \times r}$, với $r \leq n$;

Sao cho mô hình mô tả bởi phương trình (2) có thể thay thế mô hình mô tả bởi phương trình trong (1) ứng dụng trong phân tích, thiết kế, điều khiển hệ thống.

2.2. Thuật toán cắt ngắn mô hình và tính trội H_∞

Thuật toán xác định được một chuyển đổi ma trận không suy biến $x_{mod} = T^{-1}x$, $(A_{mod}, B_{mod}, C_{mod}, D_{mod}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$ sao cho A_{mod} có dạng đường chéo.

$$A_{mod} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, B_{mod} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C_{mod} = [C_1 \quad C_2]. \quad (3)$$

Trong đó mỗi giá trị riêng λ_i của A có dạng cấu trúc Jordan đơn giản.

Dạng biểu diễn tốt nhất của quá trình trên là hàm truyền $G(s)$ có thể phân tích thành tổng của các hàm truyền đơn giản sau.

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_n(s),$$

trong đó $G_i(s) = C_i(s - \lambda_i)B_i$, $i = 1 \dots n$ là các hàm truyền đơn giản. Chuẩn H_∞ của $G(s)$ có thể được xác định dựa trên các hàm truyền $G_i(s)$, $i = 1 \dots n$ như sau.

$$\|G(s)\|_{H_\infty} \leq \sum_{i=1}^n \|G_i(s)\|_{H_\infty} = \sum_{i=1}^n \frac{\|C_i B_i\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_i|}, \quad (4)$$

trong đó $\|C_i B_i\|_2 = \sigma_{\max}(C_i B_i)$.

Bên phải của biểu thức (4) cho chúng ta biết rằng mỗi một điểm cực đóng góp một

số hạng $\frac{\|C_i B_i\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_i|}$ vào chuẩn H_∞ của $G(s)$.

Trong lý thuyết điều khiển, điểm cực đóng góp nhiều có thể quan trọng hơn điểm cực đóng góp ít. Theo ý tưởng đó, ta có định nghĩa về điểm cực trội như sau.

Định nghĩa 2.1: [6] Cho hệ $G(s)$ có dạng đường chéo như trong (3), điểm cực λ_i của $G(s)$ được gọi là điểm cực trội nếu nó tương

ứng với số hạng $R_i = \frac{\|C_i B_i\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_i|}$ là giá trị lớn

nhất so với các số hạng R_j ($j \neq i$) khác. Giá trị R_i được gọi là thước đo tính trội của điểm cực λ_i .

Bây giờ ta lại quay lại với kỹ thuật cắt ngắn mô hình. Đối tượng của cắt ngắn mô hình được phân chia thành tập các giá trị riêng của A, ... điểm cực của $G(s)$ thành hai tập hợp: một tập sẽ được bỏ đi và tập còn lại được giữ trong hệ giảm bậc. Từ đó, chúng ta muốn giữ r giá trị riêng của A trong tập $A_r = \Lambda_r = \{\lambda_{r_1}, \dots, \lambda_{r_r}\}$, thì hệ thống giảm bậc thu được dựa trên thuật toán cắt ngắn là

$$G_{red}(s) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda_r} G_i(s) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda_r} C_i (s - \lambda_i)^{-1} B_i. \quad (5)$$

Giới hạn lỗi theo chuẩn H_∞ của kỹ thuật cắt ngắn mô hình được cho bởi [6]

$$\|G(s) - G_{red}(s)\|_{H_\infty} \leq \sum_{\lambda_i \in \Lambda_r} \frac{\|C_i B_i\|_2}{|\operatorname{Re} \lambda_i|} = \sum_{\lambda_i \in \Lambda_r} R_i, \quad (6)$$

Để thu được giới hạn lỗi theo chuẩn H_∞ , ta có thể loại bỏ các điểm cực có thước đo tính trội R_i có giá trị nhỏ hoặc giữ các điểm cực có thước đo tính trội R_i có giá trị lớn.

2.3 Thuật toán giảm bậc dựa theo phân tích Schur

Thuật toán giảm bậc mới sẽ chuyển đổi ma trận A của hệ (1) về dạng ma trận tam giác trên. Sau đó thực hiện sắp xếp các điểm cực theo thước đo tính trội giảm dần trên đường chéo chính của ma trận A .

Thuật toán 2.3.1: Thuật toán đưa hệ về dạng tam giác

Đầu vào: Hệ gốc (A, B, C) được mô tả như (1)

Bước 1: Tính phân tích Schur của ma trận $A : A = U\Delta U^T$, trong đó U là ma trận unitary và Δ là ma trận tam giác trên.

Bước 2: Tính Gramian quan sát Q của hệ từ phương trình Lyapunov

$$\Delta Q + Q\Delta + (CU)^T(CU) = 0$$

Bước 3: Phân tích Cholesky của $Q = R^T R$, trong đó R là ma trận tam giác trên

Bước 4: Tính ma trận không suy biến $T = UR^{-1}$

Bước 5: Tính $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT)$

Đầu ra: Hệ tương đương $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$

Thuật toán 3.2.2. Thuật toán sắp xếp lại điểm cực theo thước đo tính trội R_i

Đầu vào: Hệ $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ là đầu ra của thuật toán 2.2.2.1

Bước 1: Với mỗi điểm λ_i , với $i = 1, \dots, n$ ta tính toán thước đo tính trội tương ứng

$$R_i = \frac{\|\tilde{C}_i \tilde{B}_i\|_2}{\|\text{Re } \lambda_i\|}$$

Bước 2: Chọn thước đo tính trội lớn nhất R_i

Bước 3: Sắp xếp lại điểm cực λ_i (và liên hợp của nó $\bar{\lambda}_i$, nếu cần thiết) thành vị trí đầu tiên trên đường chéo của ma trận \tilde{A} bằng ma trận unitary (unitary matrix) U_1 :

$$U_1^* \tilde{A} U_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_i & * & * & * \\ & \bar{\lambda}_i & * & * \\ \hline & & * & * \\ & & & \ddots \\ & & & & * \\ & & & & & * \end{array} \right]$$

Bước 4: Tính hệ thống tương đương mới $(U_1^T \tilde{A} U_1, U_1^T \tilde{B}, \tilde{C} U_1)$.

Bước 5: Bỏ đi hai hàng và cột đầu tiên của $(U_1^T \tilde{A} U_1, U_1^T \tilde{B}, \tilde{C} U_1)$ ta thu được một hệ thống nhỏ $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ với kích cỡ $n-2$.

Bước 6: Lặp lại quá trình trên từ bước 1 đến 5 cho hệ thống nhỏ $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ và tiếp tục vòng lặp cho đến khi tất cả các điểm cực được sắp xếp lại theo độ lớn giảm dần của thước đo tính trội.

Đầu ra: Hệ tương đương $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ với các điểm cực được sắp xếp lại theo độ lớn giảm dần của thước đo tính trội.

III. Các ví dụ minh họa

3.1 Giảm bậc bộ điều khiển bậc cao

Bộ điều khiển hệ thống cân bằng robot theo thuật toán điều khiển bền vững H_∞ đủ bậc trong [4] có mô hình hàm truyền như sau

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3)$$

Với:

$$N(s) = 1275s^5 + 8.695e^5s^4 + 5.151e^5s^3 + 1.359e^8s^2 + 2.435e^7s + 1.091e^6$$

$$D(s) = s^6 + 715.7s^5 + 2.355e^4s^4 + 2.789e^5s^3 + 3.802e^6s^2 + 6.519e^5s + 2.872e^4$$

Bộ điều khiển đủ bậc có bậc 6 sẽ dẫn tới nhiều bất lợi khi chúng ta đem thực hiện điều khiển cân bằng robot vì mã chương trình phức tạp làm thời gian xử lý sẽ tăng lên, tốc độ đáp ứng của hệ thống điều khiển bị chậm và không đáp ứng tốt yêu cầu về thời gian thực của bộ điều khiển và có thể làm hệ thống cân bằng mất ổn định. Chính vì vậy để nâng cao chất lượng bộ điều khiển này cần phải thực hiện giảm bậc bộ điều khiển để mã chương trình trở nên đơn giản hơn, giảm thời gian xử lý, tăng tốc độ đáp ứng mà vẫn thỏa mãn được yêu cầu ổn định bền vững của hệ thống.

- Thực hiện giảm bậc bộ điều khiển theo thuật toán giảm bậc dựa theo phân tích Schur, ta được kết quả theo bảng sau:

Bậc	Mô hình hàm truyền – $W_{cr}(s)$
5	$\frac{1275s^4 + 8.694e5s^3 + 4.367e5s^2 + 1.359e8s + 1.209e7}{s^5 + 715.6s^4 + 2.349e4s^3 + 2.768e5s^2 + 3.777e6s + 3.183e5}$
4	$\frac{1275s^3 + 348.1s^2 + 1.993e5s + 1.773e4}{s^4 + 33.87s^3 + 397.9s^2 + 5540s + 466.9}$

3	$\frac{1275s^2 + 234.8s + 1.993e5}{s^3 + 33.78s^2 + 395s + 5506}$
2	$\frac{1130s + 247.6}{s^2 + 30.25s + 94.43}$
1	$\frac{1006}{s + 26.71}$

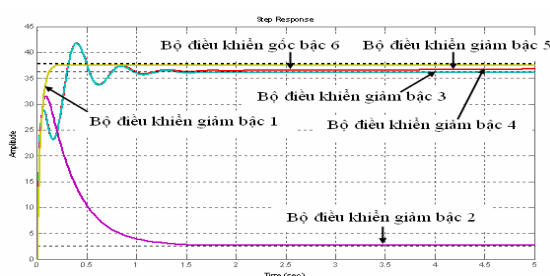
Bảng 1: Kết quả giảm bậc bộ điều khiển theo thuật toán giảm bậc dựa theo phân tích Schur

+ Đánh giá sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ ta được kết quả như sau:

Bậc	Sai số $\ W_c(s) - W_{cr}(s)\ _{H_\infty}$
5	5.1995e-005
4	4.3560e-004
3	1.7910
2	37.2364
1	38.1419

Bảng 2: Sai số giữa bộ điều khiển gốc bậc 6 và các bộ điều khiển giảm bậc

+ Để đánh giá mô hình giảm bậc, nhóm nghiên cứu đã mô phỏng đáp ứng quá độ của bộ điều khiển đủ bậc và các bộ điều khiển đã giảm bậc. Kết quả mô phỏng trên Matlab – Simulink như hình 1.



Hình 1: Kết quả mô phỏng bộ điều khiển đủ bậc và các bộ điều khiển giảm bậc

Nhận xét: Từ kết quả mô phỏng ta thấy so với đáp ứng $h(t)$ của bộ điều khiển đủ bậc 6 thì đáp ứng $h(t)$ của bộ điều khiển giảm bậc 5, 4 trùng khớp hoàn toàn; đáp ứng $h(t)$ của bộ điều khiển giảm bậc 3 có sai khác rất nhỏ; đáp ứng $h(t)$ của bộ điều khiển giảm bậc 2, bậc 1 sai khác rất nhiều. Do đó ta có thể dùng bộ điều khiển giảm bậc: 5, 4, 3 thay thế bộ điều khiển đủ bậc 6. Tất nhiên, ở đây ta chọn bộ điều khiển bậc 3 thay thế cho bộ điều khiển gốc bậc 6.

- Chúng tôi tiến hành giảm bậc của bộ điều khiển (3) theo thuật toán giảm bậc dựa theo phân tích Schur của M. G. Safonov and R. Y. Chiang [5], kết quả như sau:

Bậc	Mô hình hàm truyền – $W_{cr}(s)$
5	$\frac{1275s^4 + 8.694e005s^3 + 4.366e005s^2 + 1.359e008s + 1.209e007}{s^5 + 715.6s^4 + 2.349e004s^3 + 2.768e005s^2 + 3.777e006s + 3.183e005}$
4	$\frac{1275s^3 + 348.2s^2 + 1.993e005s + 1.775e004}{s^4 + 33.87s^3 + 397.9s^2 + 5540s + 467.2}$
3	$\frac{1275s^2 + 233.8s + 1.992e005}{s^3 + 33.76s^2 + 395s + 5499}$
2	$\frac{946.3s + 227.9}{s^2 + 24.55s + 386}$
1	$\frac{946.4}{s + 24.55}$

Bảng 3: Kết quả giảm bậc bộ điều khiển theo thuật toán giảm bậc dựa theo phân tích Schur

+ Đánh giá sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ ta được kết quả như sau:

Bậc	Sai số $\ W_c(s) - W_{cr}(s)\ _{H_\infty}$
5	1.5977e-006
4	3.4723e-004
3	1.7678
2	37.3971
1	38.8756

Bảng 4: Sai số giữa bộ điều khiển gốc bậc 6 và các bộ điều khiển giảm bậc

Từ kết quả giảm bậc ta thấy: So với đáp ứng $h(t)$ của bộ điều khiển đủ bậc 6 thì đáp ứng $h(t)$ của bộ điều khiển giảm bậc 5, 4 trùng khớp hoàn toàn; đáp ứng $h(t)$ của bộ điều khiển giảm bậc 3 có sai khác rất nhỏ; đáp ứng $h(t)$ của bộ điều khiển giảm bậc 2, bậc 1 sai khác rất nhiều. Do đó ta có thể dùng bộ điều khiển giảm bậc: 5, 4, 3 thay thế bộ điều khiển đủ bậc 6. Tất nhiên, ở đây ta chọn bộ điều khiển bậc 3 thay thế cho bộ điều khiển gốc bậc 6.

- So sánh điểm cực của bộ điều khiển gốc bậc 6 và bộ điều khiển giảm bậc 3 ta thu được kết quả như sau

+ Điểm cực của bộ điều khiển bậc 6: $-681.74; -26.71; -3.5353 + 13.9156i; -3.5353 - 13.9156i; -0.09; -0.08$

+ Điểm cực của bộ điều khiển giảm bậc 3 theo thuật toán mới: $-26.71; -3.5353 + 13.9156i; -3.5353 - 13.9156i$

+ Điểm cực của bộ điều khiển giảm bậc 3 theo [5]: $-26.6843; -3.5396 + 13.912i; -3.5396 - 13.912i$

Nhận xét: Điểm cực quan trọng của bộ điều khiển gốc bậc 6 đã được bảo toàn trong hệ giảm bậc 3 sử dụng thuật toán giảm bậc mô

hình mới, với thuật toán giảm bậc theo [5] thì điểm cực quan trọng của bộ điều khiển gốc bậc 6 không được bảo trong hệ giảm bậc 3.

3.2 Giảm bậc cho hệ SISO bậc 8

Một hệ SISO bậc 8 thường được lựa chọn để đánh giá và so sánh giữa các thuật toán giảm bậc mô hình được cho trong [5] có mô hình hàm truyền như sau:

$$W(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (5)$$

Với:

$$N(s) = 0.1209s^6 + 0.01874s^5 + 27.07s^4 + 2.077s^3 + 1505s^2 + 6.713s + 2853$$

$$D(s) = s^8 + 0.3542s^7 + 390s^6 + 50.7s^5 + 5.53e^4s^4 + 936.7s^3 + 4.674s^2 + 786.2s + 1.472e^5$$

Để đơn giản hoá mô hình của hệ phục vụ cho quá trình tìm hiểu hệ được dễ dàng hơn, ta tiến hành giảm bậc mô hình của hệ theo thuật toán giảm bậc mô hình dựa theo phân tích Schur, kết quả thể hiện ở bảng sau:

Bậc	Mô hình hàm truyền $W_r(s)$
7	$\frac{0.0001106s^6 + 0.1184s^5 + 0.05018s^4 + 13.12s^3 + 0.6966s^2 + 25.44s + 0.4283}{s^7 + 0.3436s^6 + 278.1s^5 + 10.46s^4 + 4162s^3 + 50.89s^2 + 1314s + 13.93}$
6	$\frac{-1.011e^{-5}s^5 + 0.1185s^4 + 0.01536s^3 + 13.12s^2 + 0.05516s + 25.44}{s^6 + 0.3333s^5 + 278s^4 + 7.516s^3 + 4162s^2 + 6.772s + 1314}$
5	$\frac{0.004671s^4 + 0.1116s^3 + 1.317s^2 + 11.57s + 19.14}{s^5 + 0.3324s^4 + 277.7s^3 + 7.256s^2 + 4072s + 2.24}$
4	$\frac{5.755e^{-6}s^3 + 0.04525s^2 + 9.796e^{-5}s + 0.09565}{s^4 + 0.009s^3 + 15.85s^2 + 0.01963s + 5.012}$
3	$\frac{0.004693s^2 + 0.03988s + 0.07292}{s^3 + 0.00845s^2 + 15.53s + 0.008542}$
2	$\frac{6.438e^{-6}s + 0.005329}{s^2 + 0.0011s + 0.3227}$
1	$\frac{0.004694}{s + 0.00055}$

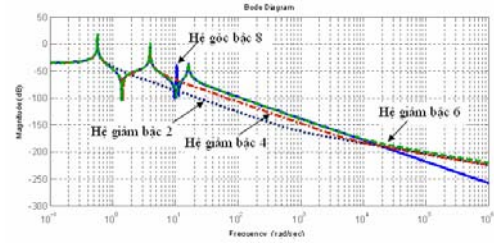
Bảng 5: Kết quả giảm bậc hệ SISO bậc 8 theo thuật toán giảm bậc mô hình dựa theo phân tích Schur

+ Đánh giá sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ ta được kết quả như sau:

Bậc	Sai số $\ W(s) - W_r(s)\ _\infty$
7	0.0114
6	0.0109
5	8.5286
4	0.0140
3	8.5199
2	1.2822
1	8.5199

Bảng 6: Sai số giữa hệ SISO gốc bậc 8 và các hệ giảm bậc

+ Đồ thị hàm bode của hệ gốc và một số hệ giảm bậc như sau



Hình 2: Đồ thị Bode của hệ SISO gốc bậc 8 và một số hệ giảm bậc

Nhận xét: Từ kết quả giảm bậc, đánh giá sai số và đồ thị hàm bode ta có thể thấy hệ gốc bậc 8 có thể giảm xuống hệ giảm bậc 7, 6, 5, 4 với sai số giảm bậc nhỏ, các hệ giảm bậc 3, 2, 1 có sai số giảm bậc lớn.

- Thực hiện giảm bậc mô hình hệ SISO bậc 8 theo thuật toán của M. G. Safonov and R. Y. Chiang [5] chúng tôi thu được kết quả như sau:

Bậc	Mô hình hàm truyền $W_r(s)$
7	$\frac{0.0001204s^6 + 0.1182s^5 + 0.05242s^4 + 13.11s^3 + 0.7416s^2 + 25.44s + 0.4662}{s^7 + 0.3432s^6 + 278s^5 + 10.75s^4 + 4162s^3 + 55.5s^2 + 1314s + 15.39}$
6	$\frac{1.15e^{-005}s^5 + 0.1185s^4 + 0.01582s^3 + 13.12s^2 + 0.0555s + 25.43}{s^6 + 0.3332s^5 + 277.9s^4 + 7.518s^3 + 4160s^2 + 6.77s + 1313}$
5	$\frac{0.002274s^4 + 0.04519s^3 + 0.04324s^2 + 0.09553s + 0.02669}{s^5 + 0.1695s^4 + 15.86s^3 + 2.564s^2 + 5.015s + 0.8044}$
4	$\frac{1.148e^{-005}s^3 + 0.04525s^2 + 0.0001099s + 0.09565}{s^4 + 0.009s^3 + 15.85s^2 + 0.01963s + 5.012}$
3	$\frac{0.005077s^2 + 0.005312s + 0.001657}{s^3 + 0.005046s^2 + 0.3227s + 0.001275}$
2	$\frac{1.289e^{-005}s + 0.005329}{s^2 + 0.0011s + 0.3227}$
1	$\frac{0.004697}{s + 0.0005502}$

Bảng 7: Kết quả giảm bậc hệ SISO bậc 8 theo thuật toán của M. G. Safonov and R. Y. Chiang [5]

+ Đánh giá sai số giảm bậc theo chuẩn H_∞ ta được kết quả như sau:

Bậc	Sai số $\ W(s) - W_r(s)\ _\infty$
7	0.0109
6	0.0109
5	0.0138
4	0.0140
3	1.2809
2	1.2822
1	8.5199

Bảng 8: Sai số giữa hệ SISO gốc bậc 8 và các hệ giảm bậc

Từ kết quả giảm bậc, đánh giá sai số ta có thể thấy hệ gốc bậc 8 có thể giảm xuống hệ giảm bậc 7, 6, 5, 4 với sai số giảm bậc nhỏ, các hệ giảm bậc 3, 2,1 có sai số giảm bậc lớn.

Từ kết quả trên ta thấy rằng kết quả giảm bậc hệ SISO bậc 8 theo 2 thuật toán là tương tự nhau. Do đó kết quả giảm bậc theo thuật toán mới là hoàn toàn đúng đắn

IV. Kết luận

Bài báo đã giới thiệu chi tiết thuật toán giảm bậc mô hình dựa theo phân tích Schur. Điểm mới quan trọng nhất của thuật toán là khả năng sắp xếp theo tính chất quan trọng của các điểm cực giảm dần trên đường chéo chính của ma trận tam giác trên A và khả năng bảo lưu các điểm cực quan trọng của mô hình gốc trong mô hình giảm bậc. Các kết quả mô phỏng thể hiện tính đúng đắn của thuật toán đã đề xuất.

V. Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Hữu Công, Vũ Ngọc Kiên, Đào Huy Du, *Nghiên cứu thuật toán giảm bậc mô hình theo phương pháp cân bằng*, Tạp chí Khoa học và Công nghệ các trường Đại học Kỹ thuật, số 80, trang 34-39, năm 2011
- [2] A.C Antoulas, *Approximation of Large – Scale Dynamical Systems*, SIAM, 2005.
- [3] Minh H.B and Kiyotsuga Takaba.(2011) “*Model reduction in Schur basis with pole retention and H_∞ - norm error bound*,” In: Proceedings of international workshop on Modeling, Systems, and Control 2011
- [4] Thanh B.T, and Manukid Parnichkun. (2008) “*Balancing control of Bicyrobo by particle swarm optimization – based structure-specified mixed H_2/H_∞ control*,” International Journal of Advanced Robotic Systems 2008; 5(4): 395- 402.
- [5] M. G. Safonov and R. Y. Chiang, "A Schur Method for Balanced Model Reduction," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. 34, no. 7, July 1989, pp. 729-733.

- [6] J. Rommes (2007), *Methods for eigenvalue problems with applications in model order reduction*, PhD thesis, Utrecht University, 2007